有限コクセター群の部分バーンサイド環の符号単元 (有限群のコホモロジー論とその周辺)

森田, 一輝

数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 75-80

有限コクセター群の部分バーンサイド環の符号単元

近畿大学大学院・総合理工学研究科　森田一輝 (Kazuki Morita)
Graduate School of Science and Engineering, Kindai University

1 Notation

G は，有限群とする．(H) は，G の部分群 H を含む G-共役類とする．$[X]$ は，G-集合 X を含む G-集合としての同型類とする．$\mathcal{D}$ は，G の部分群の collection を表す．つまり，$\mathcal{D}$ は，G-共役の作用で閉じている G の部分群族である．$C(\mathcal{D})$ は，$\mathcal{D}$ の G-共役類全体の集合とする．R を単位元を持つ可換環としたとき，$R^{\times}$ を R の単元群とする．

2 Introduction

有限群の collection の部分バーンサイド環 ([Yo90]) の単元群の研究は，[IO15] で始められた．対称群とそのヤング部分群の collection から得られる部分バーンサイド環は，1 でない単元 α を持つ ([IO15])．単元 α は対称群の交代指標を与える．

本稿では，$\mathrm{I}_2(m)$ 型のコクセター群とそのパラボリック部分群の collection から得られる部分バーンサイド環の単元を決定した．

$\Omega(G,\mathcal{D})$ を元 $[G/H]$，ただし，$H \in \mathcal{D}$，で生成された通常のバーンサイド環 $\Omega(G)$ の部分加群とする．このとき，$\Omega(G,\mathcal{D})$ は基底 $\{[G/H]|(H) \in C(\mathcal{D})\}$ を持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群である．G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ は，G/H の同型類 $[G/H]((H) \in C(G))$ の $\mathbb{Z}$-線形結合全体からなる可換環である．ただし，基底の元の間の積は

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{HgK \in [H \backslash G/K]} [G/gHg^{-1} \cap K]$$

で与えられる．

3 Burnside ring

H を G の部分群とする．写像 φ を

$$\varphi : \Omega(G) \to \tilde{\Omega}(G) := \prod_{(S) \in C(G)} \mathbb{Z} : [G/H] \mapsto (\varphi_S([G/H]))_{(S)}$$

と定義する. ここで $\varphi_S([G/H])$ は G-集合 G/H の S-固定点の個数である. 写像 φ は単射準同型である．また写像 φ を G のバーンサイド準同型という.

4 Coxeter group

W を有限群，S を有限集合とする. コクセター系 (W,S) をもつコクセター群とは

$$W \cong \langle S | (\alpha\beta)^{m(\alpha,\ \beta)} = 1,\ \alpha, \beta \in S \rangle$$

となるような W である．ただし $m(\alpha,\ \beta)$ は整数であり，$\alpha \neq \beta$ のとき $m(\alpha,\beta) \geq 2, \alpha = \beta$ のとき $m(\alpha,\beta) = 1$ とする．

コクセター系 (W,S) を持つコクセター群を $W = \langle S \rangle$ とする．集合 S の任意の部分集合を $J \subseteq S$ とする．このとき

$$W_J = \langle J \rangle$$

と W-共役である W の部分群を W のパラボリック部分群という．

5　Units of PBR of coxeter group of type $\mathrm{I}_2(m)$

$\mathrm{I}_2(m)$ 型 $(m \geq 3)$ のコクセター群を W とする．このとき W は位数 $2m$ の二面体群と同型である．位数 $2m$ の二面体群を D_{2m} とすると

$$D_{2m} = \langle a, b | a^m = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

である．$S = \{s_0,\ s_1\}$, ただし $s_0 = b$，$s_1 = ab$ とする．このとき (W,S) は $\mathrm{I}_2(m)$ 型コクセター群のコクセター系となる．W の全てのパラボリック部分群の集合を $\mathcal{P}_m$ とすると

$$C(\mathcal{P}_m) = \begin{cases} \{(1),\ (P_0),\ (W)\} & (m\text{: odd}), \\ \{(1),\ (P_0),\ (P_1),\ (W)\} & (m\text{: even}) \end{cases}$$

となる．ここで $P_0 = \langle s_0 \rangle$，$P_1 = \langle s_1 \rangle$ とする．

このとき $\mathcal{P}_m$ に関する W の $\Omega(W, \mathcal{P}_m)$ は $\mathbb{Z}$ 上の基底

$$\begin{cases} \{[W/1],\ [W/P_0],\ [W/W]\} & (m\text{: odd}), \\ \{[W/1],\ [W/P_0],\ [W/P_1],\ [W/W]\} & (m\text{: even}) \end{cases}$$

をもつ．W の $\mathcal{P}_m$ に関するマーク行列は次のようになる．

	1	P_0	W
$W/1$	$2m$		
W/P_0	m	1	
W/W	1	1	1

表 1: m : odd

	1	P_0	P_1	W
$W/1$	$2m$			
W/P_0	m	2		
W/P_1	m		2	
W/W	1	1	1	1

表 2: m : even

Proposition 5.1. [Yo90] 有理数体上の部分バーンサイド環 $\mathbb{Q}\Omega(G, \mathcal{D})$ の G の部分群 H に対応する原始べき等元を e_H，$\mu_{\mathcal{D}}$ をポセット $(\mathcal{D}, \leq)$ のメビウス関数とする．このとき

$$e_H = \sum_{(D) \in C(\mathcal{D})} \frac{|D|}{|N_G(D)|} \sum_{H \in \mathcal{D}} (\mu_{\mathcal{D}}(D,H)\varphi_H(e_H))[G/D]$$

が成り立つ．ただし $N_G(D)$ は G における部分群 D の正規化群とする．

Lemma 5.2. $\mathrm{I}_2(m)$ 型コクセター群を W とする．このとき次が成り立つ．

1. m が奇数のとき，$\mathbb{Q}\Omega(W,\mathcal{P}_m)$ の原始べき等元は,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2m}[W/1], \\ e_{P_0} &= -\frac{1}{2}[W/1]+[W/P_0], \\ e_W &= \frac{m-1}{2m}[W/1]-[W/P_0]+[W/W]. \end{aligned}$$

2. m が偶数のとき，$\mathbb{Q}\Omega(W,\mathcal{P}_m)$ の原始べき等元は,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2m}[W/1], \\ e_{P_0} &= -\frac{1}{4}[W/1]+\frac{1}{2}[W/P_0], \\ e_{P_1} &= -\frac{1}{4}[W/1]+\frac{1}{2}[W/P_1], \\ e_W &= \frac{m-1}{2m}[W/1]-\frac{1}{2}[W/P_0]-\frac{1}{2}[W/P_1]+[W/W]. \end{aligned}$$

Proof. Proposition 5.1 より成り立つ． □

Proposition 5.3. 部分群族 $\mathcal{D}$ に関する G の部分バーンサイド環を $\Omega(G,\mathcal{D})$, $\mathrm{I}_2(G,\mathcal{D}) := \{e \in \mathbb{Q}\Omega(G,\mathcal{D}) | e^2 = e \in \Omega(G,\mathcal{D}\})$ とする．このとき $\Omega(G,\mathcal{D})^\times$ と $\mathrm{I}_2(G,\mathcal{D})$ には 1 対 1 の対応がある．

Proof. 集合 $\mathrm{I}_2(G,\mathcal{D})$ の元を e とすると $1-2e \in \Omega(G,\mathcal{D})^\times$ となる．逆に $u \in \Omega(G,\mathcal{D})^\times$ に対し $\frac{1-u}{2} \in \mathrm{I}_2(G,\mathcal{D})$ となる．これらの対応は互いに逆写像である． □

Theorem 5.4. $\mathrm{I}_2(m)$ 型コクセター群を W，W の全てのパラボリック部分群の集合を $\mathcal{P}_m$ とする．

1. m が奇数のとき,

$$\Omega(W,\mathcal{P}_m)^\times = \{\pm[W/W], \pm([W/1]-2[W/P_0]+[W/W])\}.$$

2. m が偶数のとき,

$$\Omega(W,\mathcal{P}_m)^\times = \{\pm[W/W], \pm([W/1]-[W/P_0]-[W/P_1]+[W/W])\}.$$

Proof. Proposition 5.3 より成り立つ． □

以後

$$\varepsilon = \begin{cases} [W/1]-2[W/P_0]+[W/W] & (m\text{: odd}), \\ [W/1]-[W/P_0]-[W/P_1]+[W/W] & (m\text{: even}) \end{cases}$$

とする．

6 tom-Dieck 準同型と exponential map

有限群 G の実表現環を $R_{\mathbb{R}}(G)$ として，$\varphi(x) = (x_H)_{(H)\in C(G)}$ となる $\Omega(G)$ の元 x に対して，$x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H)\in C(G)})$ と書く．このとき群準同型写像

$$u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^\times : V \mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{\dim V^H})_{H\in C(G)}) \tag{1}$$

が存在する [Di79]．ただし，V は $\mathbb{R}G$-加群，V^H は V の H-不変空間である．また $\mathrm{dim}V^H$ は G の $\mathbb{C}$-指標 χ の H 上への制限 $\chi|_H$ と H の単位指標 1_H の内積に等しい．

有限群 G の実数値をとる $\mathbb{C}$-指標全体のなす環を $\overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ とする．このとき写像 u_G は群準同型

$$\overline{u}_G : \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^{\times} : \chi \mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{\mathrm{dim}V^H})_{H \in C(G)})$$

へ拡張できる．これを G の tom-Dieck 準同型という．また写像

$$\overline{\ell}_G : \Omega(G) \to \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) : [G/H] \mapsto \chi_{\mathbb{C}[G/H]}$$

を linearization map という [Ba10]．ただし $\chi_{\mathbb{C}[G/H]}$ は $\mathbb{C}G$-加群 $\mathbb{C}[G/H]$ の指標とする．tom-Dieck 準同型と linearlization map の合成

$$\exp_G := \overline{u}_G \circ \overline{\ell}_G : \Omega(G) \to \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) \to \Omega(G)^{\times}$$

として得られる写像を exponential map という．

Lemma 6.1. $\mathrm{I}_2(m)$ 型コクセター群を W とする．このとき

$$\langle \chi|_H, I_H \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } (H) = (P_i), \\ 2 \text{ } or \text{ } 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

となるような W の $\mathbb{C}$-既約指標 χ が存在する．

Lemma 6.2. W の既約指標を χ とする．このとき

$$\varphi_H(\overline{u}_W(\chi)) = \begin{cases} -1 & \text{if } (H) = (P_i), \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

となる．

Theorem 6.3. (2) の W の既約指標 χ に対して

$$\varepsilon = \overline{u}_W(\chi)$$

が成り立つ．

Proof. $H \leq W$ に対して，

$$\varphi_H([W/1]) = \begin{cases} 2m & \text{if } (H) = (1), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\varphi_H([W/P_i]) = \begin{cases} m & \text{if } (H) = (1), \\ -2 & \text{if } m \text{ odd }, (H) = (P_0), \\ -1 & \text{if } m \text{ even}, (H) = (P_i), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$\varphi_H([W/W]) = 1$ となる．(2) から

$$\varphi_H(\varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{if } (H) = (P_i), \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

を得るので，(3), (4) と φ の単射性より定理の主張が示される． □

Lemma 6.4. $\mathrm{I}_2(m)$ 型コクセター群を W をとする．このとき $\Omega(W,\mathcal{P}_m)^\times$ は tom-Dieck 準同型 $\overline{u}_W$ の像に含まれる．

Proof. Theorem 6.3 より $\overline{u}_W(1)=-1, \overline{u}_W(\chi)=\varepsilon$ である．また $\Omega(W,\mathcal{P}_m)^\times=\langle -1,\varepsilon\rangle$ より成り立つ． □

Remark 6.5. $\mathrm{I}_2(m)$ 型コクセター群を W, W の部分群を K とする．(1) において $V=\mathbb{C}[W/K]$ とすると

$$\exp_W : \Omega(W)\to\Omega(W)^\times : [W/H]\mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{|H\backslash W/K|}))_{H\in C(W)})$$

となるような写像を得る．

Theorem 6.6. $\mathrm{I}_2(p)$ 型コクセター群を W, p を素数とする．このとき

$$\Omega(W,\mathcal{P}_p)^\times\subset \mathrm{Im}\exp_W \Leftrightarrow p \text{ が非ピタゴラス素数}$$

が成り立つ．

Proof. ($\Leftarrow$) 非ピタゴラス素数を p とする．このとき

$$C(W)=\{(e),\,(P_0),\,(C_p),\,(W)\}$$

である．ただし C_p は W の p-次巡回部分群とする．また

$$(|1\backslash W/P_0|,\,|P_0\backslash W/P_0|,\,|C_p\backslash W/P_0|,\,|W\backslash W/P_0|)=(p,\,2(n+1),\,1,\,1)$$

であり，

$$\varphi(\overline{u}_W\circ\overline{\ell}_W([W/P_0]))=(-1,\ 1,-1,-1)$$

が得られる．よって

$$\exp_W([W/P_0])=\overline{u}_W\circ\overline{\ell}_W([W/P_0])=-\varepsilon$$

となる．$\exp_W([W/W])=-1$ なので $\Omega(W,\mathcal{P})^\times\subset\mathrm{Im}\exp_\mathrm{W}$ が成り立つ．
($\Rightarrow$) ピタゴラス素数を p とする．このとき

$$(|1\backslash W/P_0|,\,|P_0\backslash W/P_0|,\,|C_p\backslash W/P_0|,\,|W\backslash W/P_0|)=(p,\,2n+1,\,1,\,1)$$

であり，

$$\varphi(\overline{u}_W\circ\overline{\ell}_W([W/P_0]))=(-1,-1,-1,-1)$$

が得られる．また

$$\begin{aligned}(|1\backslash W/1|,\,|P_0\backslash W/1|,\,|C_p\backslash W/1|,\,|W\backslash W/1|) &= (2p,\ p,\,2,\,1)\\ (|1\backslash W/C_p|,\,|P_0\backslash W/C_p|,\,|C_p\backslash W/C_p|,\,|W\backslash W/C_p|) &= (2,\ 1,\,2,\,1)\end{aligned}$$

なので

$$\varphi(\exp_W([W/1]))=\varphi(\exp_W([W/C_p]))=(1,-1,1,-1)$$

となる．よって

$$\exp_W(\tilde{\Omega}(W))=\langle(-1,-1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\rangle$$

が得られるので矛盾． □

参考文献

[JL93] Gordon James.:Martin Liebeck.:*Representations and Characters of Groups*, (1993).

[Di79] tom Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.

[GP00] Geck, M.; Pfeiffer, G.: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **21**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[IO15] Idei, H.; Oda, F.:*The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.

[Ma82] Matsuda, T.: *On the unit group of Burnside rings*, Japan. J. Math. **8** (1) (1982), 71–93.

[Ya05] Yalçın, E.: *An induction theorem for the unit groups of Burnside rings of 2-groups* J. Algebra **289** (2005), no. 1, 105–127.

[Ba10] L. Barker.: Tornehave morphisms I: resurrecting the virtual permutation sets annihi- lated by linearization, Comm. Algebra **39** (2010), no. 355-395.

[Yo83] Yoshida, T.: *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, J. Algebra. **80** (1983), 90–105.

[Yo90] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.

[Gl81] Gluck, D.: *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplical complex* Illinois J. Math. Volume 25, Issue 1 (1981), 63-67.

[Co35] H. S. M. Coxeter.: *The complete enumeration of finite groups of the form* $R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}}$, J. London Math. Soc. 10 (1935), 21-25.

[So76] L. Solomon.: *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, J. Algebra **41** (1976), 255-264.